ISSN 1986–518X ISTRAŽIVANJE MATEMATIČKOG OBRAZOVANJA

Vol. II (2010), Broj 3, 3 – 14
Originalni istraživački rad

Argumentacija slutnje (formiranje hipoteze) o nivoima razumijevanja osnovnoškolske aritmetike i rane algebre studenata Pedagoškog fakulteta Univerziteta u Bihaću[1]

Senka Ibrahimpašić[2], Bernadin Ibrahimpašić[3] i Daniel A. Romano[4]

Sažetak: Ovaj rad je dio šireg istraživanja o nivoima razumijevanja osnovnoškolske aritmetike i algebre studenata nastavničkih fakulteta u Bosni i Hercegovini. Naša namjera je da argumentiramo slutnju, tj. formiramo hipotezu, da se učeničko razumijevanje aritmetičkih struktura, ovladavanje alatima algebarskog mišljenja te usvajanje baznih ideja algebre u našem školskom sistemu ili realizuje u višim razredima osnovne škole ili se (skoro) uopšte ne ostvaruje. Odavde, deduktivno, zaključujemo da je opravdano postavljanje hipoteze da (statistički velika) većina djece tokom boravka u srednjoj školi uopšte ne doseže nivo razumijevanja matematičkih ideja programski planiranih za tu školu, već razvoj matematičkog mišljenja i ovladavanja fundamentalnim aritmetičko-algebarskim idejama ostaju na novoima koje su dosegnuli školovanjem u osnovnoj školi, ili se, zbog zaboravljanja čak snize.

Ključne riječi i izrazi: nivoi razumijevanja, procjena uspješnosti, aritmetičke strukture, algebra, linearna funkcija, linearna jednačina.

Abstract: This paper is a part of a wider research about understanding levels of primary school's arithmetic and algebra of university students of teaching faculties in Bosnia and Herzegovina. Our intention is argumentation of a suspicion, i.e. to form the following hypothesis: Student understands of arithmetic structures, acquisition of algebraic meaning tools and assimilation of fundamental algebraic ideals in our school systems either realized in the high grades in primary school or (almost) not realized in general. Therefore, we conclude deductive that the following hypothesis is legitimate: Generally spiking, majority of student during learning in secondary school do not reach understanding levels of mathematics ideas planed for that school. The development of mathematics thinking and acquisition of basic arithmetic-algebraic ideas became stable in primary school levels.

Key words and phrases: understanding levels, performance evaluation, arithmetic structures, algebra, linear function, linear equation.

Mathematical Education Subject Classification: C30, C70, F40, H30

1. Uvod

Postavlja se pitanje zašto je razvijanje matematičke sposobnosti zagonetka. Ljudska vrsta ima prepoznatljiv sistem apstraktnih brojeva već 8000 godina. Formalna, simbolička matematika s jednačinama, teoremima i dokazima, pojavila se prije 2500 godina. Negativni brojevi su ušli u širu upotrebu u 18. vijeku, a moderna apstraktna algebra, u kojoj se promjenljive varijable označavaju simbolima x, y i z, razvila se prije 160 godina. Čak ni naznaka onoga što bismo mogli nazvati

---

[1] Ovaj članak je dio istraživačkog projekta „Ustanovljavanje obrazovnih nivoa u matematici“ koji realizuje Naučno društvo matematičara Banja Luka

[2] Opća gimnazija Bosanska Krupa, e-mail: senkai@bih.net.ba
[3] Pedagoški fakultet u Bihaću, e-mail: bernadin@bih.net.ba
[4] Pedagoški fakultet u Bijeljini, e-mail: bato49@hotmail.com

matematikom nije postojala u željeznom dobu. Treba naglasiti da se pojmovi matematike i aritmetike bitno razlikuju. Aritmetika je dio matematike, a veći dio matematike nije aritmetika. U školi se prvo upoznajemo s aritmetikom, pa se mnogo učenika i zaustavi na toj tački, te se prestane zanimati za matematiku prije nego što se upozna s drugim područjima unutar matematike. Zato nas i ne čudi što se matematiku i aritmetiku često izjednačava, te one postaju sinonimima. Krajem 19. vijeka je matematika postala proučavanje brojeva, oblika, kretanja, promjene, prostora i matematičkih alata koji se koriste u tom istraživanju. Bio je to početak moderne matematike.

Brojna misaona svojstva utječu na našu matematičku sposobnost. Neka od tih svojstava i sposobnosti su osjećaj za broj, sposobnost brojanja, sposobnost računanja, sposobnost apstraktnog razmišljanja i osjećaj za uzrok i posljedicu. Spomenimo također i sposobnost stvaranja i upravljanja uzročno – posljedičnim nizovima činjenica i događaja, koja se pojavljuje još u dječijoj dobi. Sposobnost koja je usko vezana za ovu posljednju je sposobnost logičkog razmišljanja. Tu je riječ o stvaranju i slijeđenju logičkih argumenata korak po korak. Ova sposobnost je temeljna za matematičko razmišljanje.

Kod mnogih učenika osnovne škole primjećuju se poteškoće pri prijelazu s aritmetike na algebru. Ove poteškoće se često prvi put identifikuju kada učenici pokušavaju kreirati algebarsku jednačinu kojom bi trebalo da predstave problem koji rješavaju. Realizatori nastave matematike, u namjeri da pomognu učenicima da prevladaju ove poteškoće, trebalo bi da razumiju kognitivne procese koji se odvijaju u učeničkim glavama pri rješavanju problema ovog tipa Trebalo bi da učenicima matematiku učine zanimljivom i praktično primjenjivom, te im daju motivaciju za njeno izučavanje i savladavanje.

Ključna stvar za uspjeh u matematici jest želja za uspjehom. Ne govori se o želji da se postane vrhunski matematičar, iako ni to nije isključeno, niti o odvažnosti uranjanja u dubine napredne matematike. Riječ je samo o sposobnosti savladavanja osnovnoškolske i srednjoškolske matematike. Kada ljudi, sami ili uz nečiju pomoć, shvate da moraju savladati određene dijelove matematike, oni u tome zaista i uspiju. Navedimo dva primjera za to.

Na početku 20. vijeka, francuski psiholog Alfred Binet je ispitivao dvojicu muškaraca koji su za život zarađivali demonstrirajući svoje aritmetičke sposobnosti računanja napamet. On je želio istražiti kako se ta dvojica profesionalnih ljudskih kalkulatora ponašaju kada ih se suoči s drugom skupinom ljudi kojima brojevi također nešto znače – blagajnicima u prodavnicama. Napomenimo da je israživanje provedeno prije uvođenja mehaničkih blagajni i električnih kasa u prodavnicama. Binet je organizirao takmičenje u računanju između dvojice aritmetičkih genija i četiri blagajnika jedne pariške prodavnice. Blagajnici su bez problema odnijeli pobjedu u jednostavnom računanju. Tako je proizvod brojeva 638 i 823, jedan od aritmetičara izračunao za 6,4 sekunde, dok je najbrži blagajnik rezultat dobio za svega 4 sekunde. Kada su morali računati proizvod brojeva 7286 i 5397, genij je dao rezultat za 21 sekundu a jedan od blagajnika za nevjerovatnih 13 sekundi.

Drugi primjer je također iz područja elementarne matematike. Skupina psihologa (Nunes, Schliemann, Carraher, 1993) je početkom 1990–ih godina testirala aritmetičke sposobnosti brazilskih učenika trećeg razreda, koji su nakon škole radili na tržnici. Sva su djeca učila uobičajene postupke sabiranja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Kada su im istraživači dali standardne školske testove, učenici su ih slabo riješili, s prosječnim uspjehom od samo 14% u jednostavnim zadacima oduzimanja trocifrenih i dvocifrenih brojeva. Međutim, kada su na tržnici morali izvoditi te iste računske operacije, djeca su bez problema rješavala slične zadatke. Kako bi izračunalo koliko novca od 200 *cruzeirosa* moraju vratiti kupcu za robu u vrijednosti 35 *cruzeirosa*, dijete je računalo na sljedeći način (prema snimljenom materijalu istraživača koji je glumio kupca): *Da roba stoji trideset, tada bih morao vratiti sedamdeset. No cijena je trideset pet. Tada je šezdeset pet. Jedna stotina šezdeset pet.* Pogledajmo šta je tačno dječak radio. Prvo je 200 podijelio na dva dijela: 100 + 100. Taj korak nije izgovorio, ali je jasno da je riječ o tome. Stavio je 100 na jednu stranu i počeo računati 100 – 35. Kako bi u tome uspio, prvo je jednostavno izračunao 100 – 30, a zatim od tog rezultata oduzima još 5. Dobija 65 i tome dodaje onih 100 koje je na početku ostavio sa strane i dobija konačan i ispravan odgovor 165. Dječak je odgovor dobio vrlo brzo – napamet je oduzeo dva broja među bučnim mnoštvom tržnice – a koristio se oštroumnim matematičkim postupkom. Matematičari bi rekli da dječakovo rješenje sadrži istančanije matematičko razmišljanje od jednostavne primjene standardnog školskog postupka oduzimanja.

Postavlja se pitanje da li je taj dječak na uličnoj tržnici bio mladi Einstein. Ne, riječ je o običnom djetetu. Iako su beznadni slučajevi pri rješavanju matematičkih zadataka u školi, djeca su lako računala na uličnoj tržnici. Istraživači su zaključili da su učenici bili promašeni slučajevi u školskoj matematici, ali iznimni u uličnoj matematici. U čemu je razlika između tih dviju matematika?

Zasigurno ne u samoj matematici, jer je dva plus dva jednako četiri i na ulici i u učionici. Razlika leži u motivaciji. Djeca su bila motivirana pri radu na tržnici, za razliku od nedostatka motivacije u školi.

Prema dostupnoj literaturi (Bednarz, Radford, Janvier and Lepage, 1992; Romano, 2009a; Ceballos and Maximo, 2007; Tall 2001), na algebru se može gledati, kao na jedan apstraktan sistem u kojem se reflektuju aritmetičke strukture (Cooper, Williams and Baturo, 1999) ili na jedan sistem koordinatizacije po Weyl (Weyl, 1995) – Šafarevičevom (Шафаревич, 1986) konceptu. Strukture o kojima je riječ mogu biti apstraktne šeme (Ohlsson, 1993) ili strukturne koncepcije (Sfard, 1991) aritmetičkih operacija jednakosti i operacionih pravila kombinovanih sa algebarskim pojmom varijable (Cooper, Boulton–Lewis, Atweh, Wills and Mutch, 1997). Algebra ne operiše na istom nivou kao aritmetika: dok je aritmetika ograničena brojevima i numeričkim izračunavanjima, u algebru je involvirano pisanje simbola i razumijevanje operacija. Osnovni zahtjev u algebri je razumijevanje da oznaka jednakosti ukazuje na ekvivalenciju, te da informacije mogu biti procesuirane bilo kojim uputstvima (Linchevski, 1995).

U ovom radu namjera nam je, pridržavajući se tehnologija savremenih istraživanja matematičkog obrazovanja (Biehler, Scholz, Strässer and Winkelmann, 1994; Sierpinska and Kilpatrick, 1998; English 2008; Romano, 2009b) da argumentujemo slutnju (tj. formiramo hipotezu) o uronjenosti naše nastavne prakse, u kojoj su obrazovani na prethodnom nivou osnovne i srednje škole, u neki prepoznatljivi sistem matematičkog obrazovanja, aktuelni studenti dvije studijske grupe – studijske grupe za razrednu nastavu (studenti B) i studijske grupe za predmetnu nastavu (studenti A) – Pedagoškog fakulteta Univerziteta u Bihaću, kao i o primjenjivanim nastavnim tehnologijama prilikom njihovog matematičkog obrazovanja u prethodnom obrazovnom sistemu. U okvirima akademskog kursa 'Metodika nastave matematike', studenti su rješavali baždareni test u kojem je trebalo (između ostalog) da rješavaju dva kontekstualna zadatka i dva dril–zadatka. Prvi zadatak omogućava ustanovljavanje nivoa aritmetičkog mišljenja, a drugi zadatak omogućava ustanovljavanje nivoa algebarskog mišljenja – oba na nivou viših razreda osnovne škole. S druge strane, dril–zadaci su standardni zadaci iz obaveznih udžbenika za više razrede osnovne škole (studenti B) i srednje škole (studenti A). Iz dobijenih rezultata testiranja, formira se slutnja da je tokom njihovog prethodnog školovanja, u osnovnoj i srednjoj školi, uglavnom bila primjenjivana nastavna praksa duboko uronjena u tzv. tradicionalni pristup matematičkom obrazovanju. Testirani studenti, bivši učenici su, manje ili više, istrenirani da dobro rješavaju tzv. dril matematičke zadatke. Dakle, opravdano se može formirati slutnja (postaviti hipoteza) da su, tokom realizacije nastave matematike u osnovnoj školi, realizatori nastave matematike mnogo manje napora ulagali da kod učenika formiraju alate aritmetičkog i algebarskog mišljenja, a da su, uglavnom, učenicima prenošene informacije o glavnim aritmetičkim i algebarskim idejama. Dalje, ovu slutnju proširujemo do konstatacije – ukoliko učenici nisu ovladali alatima aritmetičkog i algebarskog mišljenja u višim razredima osnovne škole, da uglavnom propuste to da nadoknade tokom srednjoškolskog obrazovanja. Ovu slutnju možemo argumentovati fokusirajući se na studente studijske grupe razredne nastave, dok je situacija nešto manje povoljna ako se fokusiramo na studente studijske grupe za predmetnu nastavu.

2. Determinisanje problema

Postoji jedan važan zadatak matematičkog obrazovanja (Romano 2005; Romano 2007). To je razvoj sposobnosti pravilnog shvatanja zadatka, pravilnog razmišljanja, logičkog zaključivanja i usvajanja matematičkog (algebarskog i geometrijskog) mišljenja. Svako ima potrebu da nauči praviti analize, razlikovati hipotezu od činjenica, kritikovati, shvatati smisao postavljenih zadataka, praviti sistematizacije, egzaktno iznostiti svoje misli, i tome slično, a s druge strane, razvijati osjećaj za imaginaciju, te snažiti svoj smisao za intuitivnost (prostorno predstavljanje, sposobnost predviđanja rezultata, te sposobnost predviđanja ispravnih puteva rješavanja zadataka). Drugim riječima, matematika je potrebna za intelektualni razvoj ličnosti.

Yerushalmy i Schwartz (Schwartz and Yerushalmy, 1995; Yerushalmy and Schwartz, 1993) podržavaju stav da je pojam funkcije jedan od fundamentalnih subjekata algebre i da taj pojam treba da bude prisutan u svakom predstavljanju pri podučavanju i učenju algebre od samih početaka involviranja algebre u aritmetičke strukture. U svom čuvenom tekstu „Šta je to algebarsko mišljenje“ (*Just what is Algebraic Thinking?*) iz 1998. godine, Shelley Kriegler iznosi stav da je algebarsko mišljenje organizovano u dvije glavne komponente: razvoj sredstava matematičkog mišljenja i sagledavanje fundamentalnih algebarskih ideja. Alatima matematičkog mišljenja smatra se sljedeće (Kriegler, 1998; Romano, 2009a): *analitička sredstva svijesti*, *specijalne vještine rješavanja problema*, *vještine rezonovanja i posebne reprezentativne vještine*. Fundamentalne algebarske ideje predstavljene su domenom u kojem sredstva matematičkog mišljenja mogu da se razvijaju. Algebarske ideje ovdje su predstavljene posredstvom tri različita pogleda (Kriegler, 2006): *algebra kao apstrakcija aritmetike*, *algebra kao jezik* i *algebra kao jedan alat koji nam omogućava da analiziramo funkcije i matematičke modele*.

Algebra kao specifična studija o funkcijama, relacijama i kovarijantama karakterizirana je posredstvom veza i šablona između varijabli (O'Callaghan, 1998), koncepta jednakosti (O'Callaghan, 1998), pojavljivanjem koncepata posredstvom modeliranja (Yerushalmy, 2000), manipulacija funkcionalnim izrazima i komparacijama (Yerushalmy, 2000; Warren and Cooper, 2005), iskorištavanja familija funkcija (Yerushalmy, 2000) te istraživanja šema promjena (Carlson et al., 2002). Ovaj pristup algebri je važan za pristup algebarskom mišljenju. Carlson et al. (2002, p. 354) opisali su kovarijantno rezonovanje kao „kognitivne aktivnosti involvirane u koordinatizaciju dvovarijantnih kvantiteta, pri čemu se to odvija na način da su one međusobno ovisne jedna od druge“. Nasuprot mnogim studijama o ranoj algebri postoje istraživanja koja se nalaze između nastojanja da se formiraju posebne adidaktičke situacije koje bi bile most između intuitivnog iskorištavanja pojmova i oznaka u algebri s jedne strane, i fluentnog korištenja algebarskog jezika (npr, Ceballos and Maximo 2007).

Dakle, koncept funkcije je jedna od centralnih ideja algebre. Mnogi istraživači (npr, Kieran, 1997) sugerišu da se podučavanje algebre bazira na funkcijama. Izračunavanja, korištenjem kalkulatora ili bez njega, lako mogu da se predstave tabelama i grafovima funkcija što, s druge strane, omogućava konstruisanje formula za funkcije kao modela za analitički prikaz nekih podataka te obavljanja algebarskih operacija na funkcijama.

Prema instrukcijama Evropske asocijacije za istraživanje matematičkog obrazovanja ’ERME’ (Rososhek, 1998; Ainley, Bills and Wilson, 2003; Specht, 2005; Drouhard, 2009) i Internacionalne grupe za istraživanje psihologije matematičkog obrazovanja ’PME’ (Bednarz, Radford, Janvier and Lepage, 1992; Cooper, Boulton–Lewis, Atweh, Wills and Mutch, 1997; Redford, 2006; Ceballos and Maximo, 2007), sljedeći bazni elementi algebarskog znanja bi trebalo da su poželjni ishodi školskog sistema:

1. Algebarska simbolika – kao jedan univerzalni jezik za opisivanje realiteta;
2. Algebarske operacije u kontekstima svih njihovih elementarnih osobina;
3. Algebarske strukture – kao posebne forme kodiranja informacija i
4. Algebraski semantički pojmovi – kao što su premise za realizaciju posebnih aspekata realnosti.

3. Metoda

Subjekti ovog istraživanja su bili stariji studenti studijskog programa za razrednu nastavu (učitelji – 18 studenata) i studenti studijskog programa za predmetnu nastavu (profesori srednje škole – 24 studenta). Trebalo bi da su ovi studenti dobri poznavaoci tehnika rješavanja matematičkih zadataka, budući da je to jedan od koncepata obrazovanja nastavnika matematike za osnovnu i srednju školu. Ne treba posebno isticati da su svi uspješno okončali osim obavezne osmogodišnje škole i srednju školu, u kojima su imali najmanje deset godina matematiku. Tokom tih 10 – 12 godina matematičkog obrazovanja trebalo bi da su savladali fundamentalne matematičke ideje u aritmetici i algebri, te da su familijarni s alatima matematičkog mišljenja. U okvirima kurseva Metodika nastave matematike, prilikom testiranja, njima su postavljena dva kontekstualna zadatka: jedan aritmetički zadatak za identifikaciju zrelosti poimanja aritmetičkih struktura (Zadatak 7), i poznati algebarski zadatak, tzv. ’taxi problem’, za identifikaciju nivoa razumijevanja algebre na nivou okončane osnovne škole (Zadatak 8), te dva dril–zadatka (Zadaci 9 i 10) iz standardnih udžbenika matematike za više razrede osnovne škole, odnosno za srednju školu. Nas, u ovom istraživanju, posebno zanima kako su studenti rješavali Zadatak 8, i koje su strategije koristili pri tome. Ovako dobijeni parametri će nam omogućiti da argumentujemo slutnju da se u nas, u Bosni i Hercegovini, zrelost u sagledavanju aritmetičkih struktura ostvaruje pravilnim podučavanjem matematike u osnovnoj školi, a ovladavanje alatima algebarskog mišljenja pravilnim podučavanjem matematike u višim razredima osnovne škole i prva dva razreda srednje škole. Autori ovog teksta su uvjerenja da tradicionalni pristup nastavi matematike, kakav se još uvijek praktikuje u našoj sredini, ne doprinosi sagledavanju funkcionalnosti aritmetičkih struktura niti razumijevanju aritmetike. Isto tako, tokom našeg višegodišnjeg iskustva u realizaciji kurseva metodike nastave matematike u obrazovanju nastavnika za niže razrede osnovne škole (studijski program razredne nastave) i nastavnika matematike za više razrede osnovne škole i za srednju školu (studijski program za predmetnu nastavu), sublimirano je uvjerenje o skromnom usvajanju tehnologija i alata algebarskog mišljenja, koje prevazilazi karakteristike rane algebre. Iznošenjem ovih činjenica smatramo da argumentujemo hipotezu o sljedećim zapažanjima:

(1) U našim osnovnim školama još uvijek gospodari tradicionalni dril–pristup matematičkom obrazovanju;
(2) Tokom srednjoškolskog obrazovanja, učenici skoro da ne stiču poželjna matematička znanja niti ovladavaju matematičkim vještinama, neophodnim svakoj individui u njenom nastojanju da dosegne akademsko obrazovanje;
(3) Distinkcija između učeničkih uvjerenja o njihovim vlastitim sposobnostima da mogu da sagledavaju probleme, te izvrše linearnu i vertikalnu matematizaciju tih problema, s jedne strane, i njihovih stvarnih sposobnosti, s druge strane, formiraće uvjerenje u populaciji akademski obrazovanih osoba da raspolažu znanjima i vještinama naprednog matematičkog mišljenja. To će neprekidno dovoditi do konfliktnih situacija u njihovom postfakultetskom životu i radu;
(4) Pretpostavivši da će većina intervjuisanih sudenata biti prosvjetni radnici, njihovo već oformljeno pogrešno uvjerenje o svojim usvojenim matematičkim znanjima i vještinama biće preneseno na sljedeće generacije;

Kakve se konzekvence iz ovih postulata daju dedukovati? – sasvim je opravdano postaviti pitanje.

4. Rezultati – analiza studentskih odgovora

Zadatak 7, koji je bio isti za studente obje grupe, nam je trebao poslužiti da kod studenata utvrdimo zrelost poimanja aritmetičkih struktura. Tekst zadatka je:

Zadatak 7. 588 putnika mora se prevesti iz jednog mjesta u drugo – radi čega će putnici koristiti dva različita voza. Jedna kompozicija sadrži samo vagone od 12 mjesta, dok se u drugoj kompoziciji nalaze samo vagoni sa 16 mjesta. Pretpostavimo da druga kompozicija ima osam vagona više nego prva kompozicija. Koliko vagona najmanje treba da imaju obje kompozicije da bi se svi putnici prevezli?

Uspješnost u rješavanju ovog zadatka je prikazana sljedećom tabelom.

BROJ OSVOJENIH BODOVA		10	9	3	0	NISU RJEŠAVALI
BROJ STUDENATA	A	1		1	10	12
	B		1		16	1

Iz tabele je vidljivo da su studenti grupe A predosjetili da za rješavanje zadatka treba uspostaviti vezu između više podataka, što i nije tako jednostavno, te zahtijeva dublju i detaljniju analizu, pa ih je samo 50% pristupilo rješavanju. I rezultati studenata grupe A o uspješnosti u rješavanju, gdje su od onih koji su rješavali zadatak skoro svi, osim jednog, pogrešno riješili zadatak pokazuju disproporciju studentskih uvjerenja o sposobnostima i njihovih stvarnih sposobnosti. Studenti grupe B su skoro svi pristupili rješavanju ovog zadatka. Jedan od mogućih razloga zbog kojeg su skoro svi pokušali riješiti ovaj zadatak je taj da su numerički podaci u zadatku prirodni brojevi, što zna dovesti do pretpostavke da je zadatak intuitivno lako rješiv. I sam način rješavanja ovog zadatka upućuje na ovo, jer se više pokušavalo zadatak rješavati pogađanjem nego što je u potpunosti izvršena analiza zadatka. Studenti koji su izvršili potpunu analizu zadatka, odredili jasno poznate podatke i postavili cilj su i imali uspjeha u njegovom rješavanju. Ipak, zbog relativne složenosti zadatka, skoro svi studenti grupe B su ga pogrešno riješili.

Zadatak 8, koji je također bio isti za obje grupe, je poznati 'taxi problem'. Trebalo je da nam posluži za identifikaciju nivoa razumijevanja algebre na nivou okončane osnovne škole. Zadatak je postavljen kroz 6 pitanja, u kojima se trebao pokazati širok dijapazon matematičkog razmišljanja i zaključivanja. Zadatak je zahtijevao potpunu analizu i shvatanje traženog. Trebalo je preći put od intuitivnog poimanja do algebarskog i aritmetičkog rješavanja. Iako je zadatak u suštini primjer problema koji se rješava uz pomoć linearnih funkcija i linearnih jednačina, a koji učenicima u toku školovanja kroz osnovnu i srednju školu predstavlja rješiv izazov, broj tačnih odgovora je raznolik, što je i vidljivo iz dane tabele uspješnosti rješavanja ovog zadatka. Zadatak glasi:

Zadatak 8. Kada koristimo taksi, plaćamo 'polazni trošak' u iznosu od 0.80€ (0.70€), i 0.30€ (0.26€) po pređenom kilometru. Odgovoriti na sljedeća pitanja:

1. Od čega zavisi trošak jednog korištenja taksija?
2. Ako platimo y eura za jedno korištenje taksija, pri pređenih x kilometara, prikazati y kao funkciju veličine x.
3. Napraviti kratku tabelu međuzavisnosti veličina x i y.
4. Opisati kako se konstruiše graf ove funkcije.
5. Ako je za jedno korištenje taksija plaćeno 5€, koliko kilometara je pređeno?
6. Ako je pri korištenju taksija šoferu dato 5€, koje sve moguće rute su plaćene, i koliki je kusur pri svakoj od tih ruta?

Pogledajmo tabelu koja prikazuje uspješnost u rješavanju ovog zadatka, iz koje je vidljivo da su skoro svi, osim jednog studenta grupe A pristupili rješavanju zadatka, dok u grupi B skoro 40% studenata nije uopšte rješavalo zadatak.

BROJ OSVOJENIH BODOVA		10	8	6.67	5	4	3.3	2.5	0	NISU RJEŠAVALI
BROJ STUDENATA	A	5	2	4	4	1	1	1	5	1
	B			1					10	7

U ovom zadatku, gdje se odgovaralo na 6 postavljenih pitanja, studenti su davali različite odgovore. Studenti predmetne nastave su skoro svi odgovarali na postavljena pitanja, i broj tačnih odgovora je bio raznolik, dok su studenti razredne nastave, osim jednog kandidata koji je tačno odgovorio na 4 postavljena pitanja, uglavnom dali sve pogrešne odgovore, dok njih 7 nije uopšte odgovaralo.

Studenti predmetne nastave (A) su dali sljedeće odgovore:

Pitanje 1: Od čega zavisi trošak jednog korištenja taksija?

1.1. Trošak jednog korištenja taksija zavisi od broja pređenih kilometara, jer je polazni trošak konstantan za svako korištenje.
1.2. Trošak zavisi od pređenog puta.
1.3. Trošak jednog korištenja taksija zavisi o pređenim kilometrima.

Pitanje 2: Ako platimo y eura za jedno korištenje taksija, pri pređenih x kilometara, prikazati y kao funkciju veličine x.

2.1. $y = a + bx$ (ispravno).
2.2. Zadatak nije rješavan

Pitanje 3: Napraviti kratku tabelu međuzavisnosti veličina x i y.

3.1. Ispravno.
3.2. y je veće ukoliko je broj kilometara veći, y zavisi od x.
3.3. Zadatak nije rješavan.

Pitanje 4: Opisati kako se konstruiše graf ove funkcije.

4.1. Graf ove funkcije konstruišemo u pravouglom koordinatnom sistemu na način da na „x–osu" nanosimo vrijednost pređenih kilometara x, a na ordinatu („y–osu") nanosimo trošak svakog korištenja taksija (ili dio njih) te na taj način dobijamo tačke grafa ove funkcije i spojimo ih linijom. (Pošto je u pitanju linearna funkcija, njen graf će biti prava linija (ravna)).
4.2. Graf ove funkcije je pravac, tj. poluprava koja prolazi početnom tačkom (0; 0.7) i bilo kojom drugom tačkom koju izračunamo, npr. (1; 0.96).
4.3. Zadatak nije rješavan.
4.4. Imamo y i x osu. Nacrtamo ih. x predstavlja broj pređenih kilometara a y osa predstavlja trošak.
4.5. Riječ je o linearnoj funkciji. Graf se konstruiše u koordinatnom sistemu, gdje jedna osa, osa x, predstavlja broj pređenih kilometara, a druga, y, predstavlja trošak.

Pitanje 5: Ako je za jedno korištenje taksija plaćeno 5€, koliko kilometara je pređeno?

5.1. Rješavanjem pripadne linearne jednačine.
5.2. Zadatak nije rješavan.
5.3. Potpuno pogrešno, na primjer:

$$x = 5, \quad y = 0.8 + 0.3 \cdot 5 = 2.3km$$

Pitanje 6: Ako je pri korištenju taksija šoferu dato 5€, koje sve moguće rute su plaćene, i koliki je kusur pri svakoj od tih ruta?

6.1. Moguće rute su: 16.53km i manje ka nuli. To je niz $A_n = (0.26n + 0.70)$, gdje je $0 < n < 16.5$.
6.2. Ako smo šoferu dali 5€ moguće je da smo prešli od 1km (vraćeni kusur 4.04) do 16km (vraćeni kusur 0.18)
6.3. Za $x \leq 16.53$. Specijalno, za x = 16.53, račun iznosi 5€, bez kusura.
6.4. Zadatak nije rješavan.
6.5. Ako je šoferu dato 5€ moguće pređene rute su dobijene dijeljenjem broja 5 – 0.8 s brojevima $1, 2, \ldots, 14$ pri čemu su ostaci kod dijeljenja kusur koji se ostvaruje.

Studenti razredne nastave (studenti B) dali su sljedeće odgovore:

Pitanje 1: Od čega zavisi trošak jednog korištenja taksija?

1.1. Zadatak nije rješavan.
1.2. Zavisi od toga koliko ćemo se dugo voziti po kilometru.
1.3. Trošak jednog korištenja taksija zavisi od početnog troška i pređenih kilometara.
1.4. Trošak jednog korištenja taksija zavisi od pređene kilometraže.
1.5. Trošak jednog korištenja taksija zavisi od toga koliko ćemo kilometara preći.
1.6. Trošak jednog korištenja taksija zavisi od količine pređenog puta.
1.7. Zavisi od polaznog troška.

Pitanje 2: Ako platimo y eura za jedno korištenje taksija, pri pređenih x kilometara, prikazati y kao funkciju veličine x.

2.1. $y = a + bx$ (ispravno).
2.2. Zadatak nije rješavan.

Pitanje 3: Napraviti kratku tabelu međuzavisnosti veličina x i y.

3.1. Zadatak nije rješavan.

Pitanje 4: Opisati kako se konstruiše graf ove funkcije.

4.1. Zadatak nije rješavan.

Pitanje 5: Ako je za jedno korištenje taksija plaćeno 5€, koliko kilometara je pređeno?

5.1. Bez rješavanja jednačine ponuđen odgovor.
5.2. Zadatak nije rješavan.
5.3. Primjer:
0.8€ - polazni trošak, 0.3€ po pređenom kilometru
$5-0.8=4.20$
$4.20:0.30=14$
Pređeno je 14km.
5.4. Ispravno rješavanjem jednačine $5=0.8+0.3x$
5.5. Primjer:
Polazni trošak 0.8€, pređeni kilometar 0.3€
x kilometara 5€
Pređeno je 16km
5.6. Primjer:
5€ – 0.7€ „polaznog troška“ $=4.30:16=0.14$ €
Pređeno je 16 kilometara

Pitanje 6: Ako je pri korištenju taksija šoferu dato 5€, koje sve moguće rute su plaćene, i koliki je kusur pri svakoj od tih ruta?

6.1. Zadatak nije rješavan.
6.2. Zadatak urađen ispravno navođenjem svih mogućnosti. (samo jedan slučaj)
6.3. Plaćene su rute na 3km, 6km, 9km, 12km, 15km a kusur na svakoj ruti je 0.1€ (jedan slučaj).
6.4. Ako je šoferu dato 5€ pređeno je 16 kilometara, a kusura je ostalo 0.14€. Pređeno je 16 ruta od po 1 kilometar.

Iz analize danih odgovora i njihove tačnosti, primjetna je raznolikost u odgovaranju. Kod studenata grupe B, od studenata koji su pristupili rješavanju zadatka, samo je jedan student dao 4 tačna odgovora, od 6 mogućih, a svi ostali su dali sve pogrešne odgovore. Studenti su bili privučeni malim brojem numeričkih podataka i predosjećajem lakoće zadatka, jer je zadatak takav da dolazi iz stvarnog života. Jedan od mogućih problema je bio taj da numerički podaci nisu bili prirodni brojevi, pa je bilo malo teže doći do rezultata pogađanjem. Zato su studenti uglavnom pokušavali dati odgovore na pitanja koja nisu zahtijevala numeričko rješavanje, nego logičko zaključivanje. Sudenti grupe A su skoro svi pristupili rješavanju zadatka i imali su relativno uspjeha u njegovom rješavanju. Odgovori koji su zahtijevali logičko zaključivanje, uglavnom im nisu predstavljali problem. Na mjestima gdje se zahtijevalo numeričko rješavanje, problem nije predstavljao oblik numeričkih podataka, nego nedostatak potpune analize poznatih i traženih podataka, te izrada potpunog algoritma za rješavanje.

Grupa zadataka kojima smo htjeli ustanoviti opravdanost zaključka o skromnom raspolaganju alatima aritmetičkog i ranoalgebarskog mišljenja kod studenata su dva dril–zadatka, preuzeta iz standardnih zbirki zadataka predviđenih za korištenje u srednjoj školi (za studente grupe A), odnosno u višim razredima osnovne škole (za studente grupe B).

Zadatak 9 je za svaku studijsku grupu bio iskazan u dva oblika, i to za jednu polovinu studenata u jednom obliku, a za drugu polovinu u drugom obliku. Obje studijske grupe su imale zadatak istog tipa, s tim što su studenti predmetne nastave imali opštiji oblik. Jedna stvar koja se može zapaziti kod ovog zadatka je da su ga svi studenti, u obje grupe, rješavali. To sugeriše o uvjerenosti studenata o njihovoj matematičkoj kompetentnosti, tj. sugeriše o njihovoj uvjerenosti da raspolažu sposobnostima i vještinama neophodnim za rješavanje ove vrste zadataka. Značajnija uspješnost u rješavanju ovog zadatka od strane studenata grupe A u odnosu na grupu B, vjerujemo, proizilazi iz bolje upućenosti prve grupe studenata u alat matematičke indukcije, s kojom se oni susreću na prvoj godini svog studija i permanentno ga koriste. O disproporciji između studentskih uvjerenja o njihovim vlastitim sposobnostima i stvarnim sposobnostima ilustruju rezultati rješavanja ove grupe zadataka.

Radi uvida u uspješnost u rješavanju zadataka, navodimo zadatke i procjenu uspješnosti u rješavanju ovih zadataka, za obje studijske grupe.

Predmetna nastava:
Zadatak 9.

a) Naći formulu za zbir prvih n parnih prirodnih brojeva.
b) Naći formulu za zbir prvih n neparnih prirodnih brojeva.

Razredna nastava:
Zadatak 9.

a) Izračunati zbir prvih 200 parnih prirodnih brojeva.
b) Izračunati zbir prvih 200 neparnih prirodnih brojeva.

BROJ OSVOJENIH BODOVA		10	8	5	3	0
BROJ STUDENATA	A	11		6	1	6
	B	2	2	1		13

Zadatak 10 je, kao i prethodni, bio iskazan u dva oblika, i to za jednu polovinu studenata u jednom obliku, a za drugu polovinu u drugom obliku. Međutim, za razliku od prethodnog zadatka, studijske grupe su imale zadatak potpuno različitog tipa. Cilj ovog zadatka je bio da nam omogući da procjenjujemo sposobnost razumijevanja algebarskih (studenti A) i aritmetičkih-ranoalgebraskih struktura (studenti B). U ovom drugom slučaju (zadatak za studente grupe B), htjeli smo da steknemo uvid u pravilno razumijevanje zadatka, te u sposobnost horizontalne i vertikalne matematizacije problema. I kod ovog zadatka, treba istaknuti činjenicu da su ga svi studenti rješavali. Dakle, zbog skoro ravnomjerne raspoređenosti (ne)uspješnosti u rješavanju ovog zadatka, može se iskazati tvrdnja, analogna tvrdnji o uvjerenosti studenata koju smo iskazali u vezi sa Zadatkom 9: postoji znatno razmimoilaženje između studentskih uvjerenja o njihovim sposobnostima i stvarnih sposobnosti.

Predmetna nastava:
Zadatak 10.

a) Dokazati da za tri pozitivna realna broja a, b i c vrijedi nejednakost

$$(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc\,.$$

b) Ako je $a+b+c=1$ i $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$, tada je $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc.$ Dokazati.

Razredna nastava:
Zadatak 10.

a) Zbir tri broja je 4368. Koji su to brojevi ako je drugi broj polovina prvog broja, a treći broj polovina drugog broja?
b) Zbir tri broja je 1995. Koji su to brojevi ako je drugi broj četiri puta veći od prvog broja, a treći broj dva puta manji od drugog broja?

BROJ OSVOJENIH BODOVA		10	8	6	5	3	2	1	0
BROJ STUDENATA	A	2		1		1			20
	B	4	1		1		1	1	10

Može se primijetiti da, iako su zadatak rješavali svi studenti, da ih je (naročito kod studenata predmetne nastave) velika većina (87.5%) netačno uradila. Procenat pogrešnog rješavanja (uspješnost manja od 5 bodova) ovog zadatka studenata grupe B iznosi 66.67%. Dakle, iako su se opredijelili da u budućnosti budu prosvjetni radnici što bi trebalo da podrazumijeva da posjeduju istaknutije sposobnosti te da vladanjem iznadprosječnim vještinama rješavanja jednostavnih, linearno složenih, nelinearno složenih i nestandardnih zadataka, skromna uspješnost u rješavanju ove posljednje grupe zadataka poentira značajnu distinkciju između njihovih uvjerenja o svojim visokovalidnim neophodnim sposobnostima, vještinama i znanjima za tu profesiju, s jedne strane, i njihovih niskovalidnih stvarnih karakteristika za uspješno bavljenje prosvjetnom profesijom, s druge strane.

5. Komentari

Oslanjajući se na ovaj intervju (test), zaključujemo da bi pristup podučavanju matematike u višim razredima osnovne škole i prva dva razreda srednje škole, baziran na nekoj (bilo kojoj) savremenoj teoriji matematičkog obrazovanja, umjesto na standardni pristup, kakav je sad prisutan u našem obrazovnom sistemu, dao mnogo bolje rezultate. Vjerujemo (poučeni međunarodnim iskustvima) da bi, na primjer, teorija didaktičkih situacija ili teorija realističkog matematičkog obrazovanja, značajnije doprinosila razvoju algebarskog mišljenja kod učenika srednje škole, odnosno studenata nastavničkih fakulteta. Vjerujemo da bi ravnopravniji odnos realizatora nastave matematike prema potrebi dosezanja viših nivoa razumijevanja aritmetike i algebre, ali i ovladavanja baznim idejama algebre u podučavanju i učenju matematike u srednjoj školi, davao bolje rezultate nego što ih sada daje ovaj tradicionalni pristup matematičkom podučavanju. Naravno, iako odgovornost za nedovoljno visok nivo razumijevanja aritmetičko–algebarskih ideja leži na realizatorima nastave matematike u osnovnoškolskom i srednjoškolskom sistemu, značajniji dio odgovornosti leži u institucijama, čija je obaveza stvaranja socio–kulturnih uslova za nastavu matematike. Resorna ministarstva bi trebala da, posredstvom zakona o osnovnom obrazovanju i vaspitanju i zakona o srednjem obrazovanju i vaspitanju, te podzakonskim aktima, uz aktivno učešće i podršku pedagoških zavoda, stvaraju društveni milje u kojem bi se moglo pristupiti drugačijem, u ovom slučaju sigurno naprednijem i svrsishodnijem sistemu podučavanja i učenja matematike.

6. Zaključna refleksija – šta bi trebalo preporučiti realizatorima nastave matematike u srednjim školama

Ako je cilj matematičkog obrazovanja da, posredstvom neprekidnog podizanja kvaliteta nastave matematike u osnovnim i srednjim školama, sve učenike bolje pripreme za uspješnost u - ne samo akademskom već i svakodnevnom životu tada bi trebalo da ovladavanje vještinama rješavanja aritmetičkih, ranoalgebarskih i algebarskih zadataka bude realizovano podizanjem nivoa razumijevanja tih matematičkih struktura. Većina ovih ciljeva trebalo bi da je ostvarena podučavanjem i učenjem matematike u višim razredima osnovne škole i prva dva razreda srednje škole. Trebalo bi da svršeni učenici srednje škole raspolažu intelektualnim sposobnostima uočavanja, prepoznavanja i procjenjivanja problema, te vještinama njihove linearne i vertikalne matematizacije kroz razumijevanje konceptualne složenosti problema. Jedan od važnijih koncepata kojim se ostvaruju poželjni ishodi nastave matematike su funkcije, jednačine i nejednačine. U ovom članku, autori su nastojali da ustanove i prezentiraju rezultate istraživanja nivoa razumijevanja aritmetičkih i ranoalgebraskih struktura kod studenata jednog nastavničkog fakulteta, posredstvom utvrđivanja njihovog razumijevanja koncepata linearnih funkcija, linearnih jednačina i linearnih nejednačina.

Dugogodišnje iskustveno uvjerenje o niskoj uticajnosti matematičkog obrazovanja, tokom školovanja u srednjoj školi, na ovladavanju i razvoju fundamentalnih aritmetičkih i algebarskih ideja kod učenika, te skoro potpuni izostanak razvoja alata matematičkog mišljenja kod statistički značajnog dijela ove populacije, zahtijevalo je argumentaciju zasnovanu na pedagoškom eksperimentu: U našem obrazovnom sistemu, matematičko podučavanje se još uvijek realizuje na tradicionalan način. Takav pristup je uvijek bio niskoproduktivan. Nažalost, na matematiku i matematičko obrazovanje se u našoj društvenoj stvarnosti još uvijek gleda kao na nekakav domen za koji nije baš jasno zašto treba da bude tako značajno prisutan u školskim curriculumima. U posljednje vrijeme, značajan dio akademske zajednice (u čemu se posebno ističu predstavnici tzv. interesnih grupa i menadžmenata obrazovnih sistema) na matematiku i matematičko obrazovanje gleda kao na remetilački faktor u provođenju nekakve politike obrazovanja.

Naša namjera u ovom istraživanju (i ovom tekstu) je skretanje pažnje akademskoj i naučnoj javnosti (kao i osobama koje imaju uticaja ne samo na principijelno–filozofsko opredjeljenje društvene zajednice već i na realizaciju matematičkog obrazovanja) na dubinu istraživanog problema, i veliki broj znatno nepovoljnih konsekvenci koje prizilaze iz aktuelnog koncepta matematičkog obrazovanja u nas.

Zahvalnost. Autori se zahvaljuju prof. dr. Šefketu Arslanagiću (Sarajevo) i spec. Borisu Čakrliji (Banja Luka), koji su strpljivo i s pažnjom čitali tekst ovog rada u toku njegovog nastajanja, kao i na sugestijama koje su doprinijele da ideje izložene u ovom radu budu konciznije eksponirane.

Literatura:

[1] J. Ainley, L. Bills & K. Wilson: *Designing Task for Purposeful Algebra*; CERME 3, (2003), WG 6, 1-3
[2] L. Bazzini and P. Tsamir: *Connections between Theory and Research Findings: The Case of Inequalityies*; CERMW 3, WG 6, 1-3
[3] G. T. Bagni: *Inequalities and Equations: History and Didactics*;
[4] R. Berrincha: *The Development of Algebraic Thinking in the Study of the First Degree Equations*; 138-140
[5] N. Bednarz, L. Radford, B. Janvier and A. Lepage: *Aritmetical and algebraic thinking inproblem-solving*; PME 16 (1992), Vol. 1, 65-72
[6] Biehler, Scholz, Strässer and Winkelmann (Editors): *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*; MA: Kluwer, Norwell, 1994.
[7] H. Borko, J. Frykholm, M. Pittman, E. Eiteljorg, M. Nelson, J. Jacobs, K. Koellner-Clark, C. Schneider: *Preparing Teachers to Foster Algebraic Thinking*; ZDM, 37(1) (2005), 43-52
[8] G. Brousseau: *Theory of Didactical Situations in Mathematics*; Kluwer Academic Publisher, 1997.
[9] B. O'Callaghan: *Computer-Intensive Algebra and Students' Conceptual Knowledge of Functions*. Journal for Research in Mathematics Education 29(1)(1998), 21.
[10] T. R. Ceballos and E. P. Maximo: *Early Access to Algebraic Ideas: The Role of Representations and the Mathematics of Variation;* PME 31 (2007), Vol. 4, 113-120
[11] T. J. Cooper, G. Boulton-Lewis, B. Atweh, L. Wills and S. Mutch: *The transition from algebraic to algebra: Initial understandings of equals, operations and variables*; PME, 21(2)(1997), 89-96
[12] T. J. Cooper, A. M. Williams and A. R. Baturo: *Equals, operations and variables*; Proceedings of 24th conference of the mathematics Education Research group of Australasia (MERGA), 1999, 177-184
[13] K. Devlin: *The Maths Gene: Why Everyone Has It, But Most People Don't Use It*, Weidenfeld and Nicolson, 2000.
[14] J. P. Drouhard: *Epistemography and Algebra* CERME 6, (2009), WG 4, 54-63
[15] L. English (editor): *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed.). Routledge, New York and London: 2008.
[16] C. Kieran: *Mathematical concept at the secondary school level: The learning of algebra and functions;* In: N. Bednarz, P. Bryant and L. Lee (editors): *Learning and teaching mathematics: An international perspectives*; Psychology Press, 1997, 133-158
[17] S. Kriegler: *Just what is Algebraic Thinking?* Preprint, (1998, 2006), 1-11
[18] T. Jakobsson-Ahl: *Developing a Framework for Analyzing Algebraic Thinking*; 1-11
[19] E. J. Knuth, M. W. Alibali, N. M. McNeil, A. Weinberg and A. C. Stephens: *Middle School Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equivalence and variable*; ZDM, 37 (1) (2005), 68-76
[20] L. Linchevski: *Algbera with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra*; Journal of Mathematical Behavior, 14(1995), 113-120
[21] T. Nunes, A. Schliemann and D Carraher: *Street Mathematics and School Mathematics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1993.
[22] S. Ohlsson: *Abstract schemas*; Educational Psychology, 28(1)(1993), 51-66

[23] L. Redford: *Algebraic Thinking and Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective*; PME-NA 2006, Proceedings, Vol. 1, 2-21
[24] D. A. Romano: *Problemi matematičkog obrazovanja – jedno razmišljanje*; Mat-Kol (Banja Luka), XI(2)(2005), 1-14.
[25] D. A. Romano: *Razmišljanje o matematičkom obrazovanju;* IV Symposium “Technology, Informatics and Education for Learning and Knowledge Society”, Novi Sad, 26-27.01.2007. Institut za pedagoška istraživanja Beograd, Centar za primenu nauke, tehnologije i informatike Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet Novi Sad, Novi Sad 2007, 82-90
[26] D. A. Romano: *Šta je algebarsko mišljenje*? MAT-KOL (Banja Luka), XV(2)(2009), 19-29
[27] D. A. Romano: *Istraživanje matematičkog obrazovanja*; IMO, Vol. I(2009), Broj 1, 1-10
[28] S. Rososhek: *Forming Algebra Understanding in MPI-project*; CERME 1 (1998), 184-194
[29] J. Schmittau: *The Development of Algebraic Thinking*, *A Vygotskin perspective*; ZDM, 37(1)(2005), 16-22
[30] J. L. Schwartz and M. Yerushalmy: *On the need for a bridging language for mathematical modeling*. For the Learning of Mathematics, 15(2)(1995), 29-35.
[31] A. Sfard: *On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of some coin*; Educational Studies in Mathematics, 22(1991), 1-36
[32] A. Sierpinska and J. Kilpatrick (editors): *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (vols. 1 & 2). Kluwer Academic Publishers: Great Britain, 1998.
[33] B. J. Specht: *Early Algebra – Processes and Concepts of Fourth grades Solving Algebraic Problems*; CERME 4 (2005), 706-716
[34] И. Р. Шафаревич: *Основные понятия алгебры*, *Алгебра 1*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 11, ВИНИТИ, Москва, 1986, 5–279
[35] D. O. Tall (editor): *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1991.
[36] D. O. Tall: *Reflection on Early Algebra*; Proceedings of 25th conference of PME, 2001, 149-152
[37] M. Yerushalmy: *Problem Solving Strategies: A Longitudinal View on Problem Solving in a Function Based Approach to Algebra*; Educational Studies in Mathematics, 43(2000), 125-147
[38] M. Yerushalmy and J. L. Schwartz: *Seizing the opportunity to make algebra mathematically and pedagogically interesting.* In: T. A. Romberg, E. Fennema, and T. Carpenter (Editors) *Integrating Research on Graphical Representations of Functions*; Erlbaum Inc. NJ. 1993, 41-68.
[39] E. Warren and T. Cooper: *Introducing Functional Thinking in Year 2: A Case Study of Early Algebra Teaching*; In Contemporary Issues in Early Childhood, Vol. 6 (2005), No.2, 150- 162.
[40] H. Weyl: *Topology and abstract algebra as two roads of mathematicakl comprehension*; Amer. Math. Monthly, 102(5)(1995), 453-460